Formule d'inversion de Lagrange et fonction W de Lambert

Alexandre Abouda

Proposition (Formule d'inversion de Lagrange)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage de* 0*. On suppose que $f(0)=0$ et $f(0)\neq 0$. Si g désigne l'inverse local de f sur un voisinage U de* 0*, alors pour tout $z\in U$,*

$$g(z)=\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}[w^{n-1}]\left(\frac{w^n}{f(w)^n}\right)\right)z^n.$$

On commence par une égalité utile.

Lemme. *Soit h une fonction méromorphe définie au voisinage de* 0*, dont la seule singularité éventuelle est* 0*. Alors*

$$\mathrm{Res}(h(z);0)=\mathrm{Res}(h(f(z))f'(z);0).$$

Démonstration du lemme 1. Il suffit de vérifier l'égalité lorsque h est la fonction $z\longmapsto z^k$ où $k\in\mathbb{Z}$. On distingue deux cas :

· si $k\neq -1$, les fonctions $z\longmapsto z^k$ et $z\longmapsto f(z)^k$ sont les dérivées respectivement des fonctions méromorphes $z\longmapsto \frac{z^{k+1}}{k+1}$ et $z\longmapsto \frac{f(z)^{k+1}}{k+1}$, donc ont un résidu nul en 0

· sinon $k=-1$, et dans ce cas $\mathrm{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)};0\right)=\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z};0\right)=1$ puisque f s'écrit $z\longmapsto zv(z)$ où v est holomorphe sur un voisinage de 0 et $v(0)\neq 0$, donc $\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z}+\frac{v'(z)}{v(z)}$, d'où l'égalité puisque $\frac{v'}{v}$ est holomorphe.

□

Montrons maintenant la formule d'inversion de Lagrange.

Démonstration (de la proposition). Soit $n\geq 1$. Le coefficient devant z^n de g vaut

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{z^{n+1}};0\right)&=\mathrm{Res}\left(\frac{g(f(z))}{f(z)^{n+1}}f'(z);0\right)\quad\text{par le lemme appliqué pour } h(z)=\frac{g(z)}{z^{n+1}}\\&=-\frac{1}{n}\mathrm{Res}\left(z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{f(z)^n}\right);0\right)\quad\text{puisque } g \text{ est inverse local de } f\\&=-\frac{1}{n}\mathrm{Res}\left(\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{f(z)^n}\right);0\right)+\frac{1}{n}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{f(z)^n};0\right)\end{aligned}$$

La premier résidu est nul (c'est le résidu en 0 d'une dérivée d'une fonction méromorphe), donc $\mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{z^{n+1}};0\right)=\frac{1}{n}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{f(w)^n};0\right)=\frac{1}{n}[w^{n-1}]\left(\frac{w^n}{f(w)^n}\right)$.

□

Application. Considérons la fonction $f:w\in\mathbb{C}\longmapsto w\,e^w$. Notons W l'inverse local de f en 0 (on a bien $f(0)=0$ et $f'(0)=1$ est non nul car $f'(w)=(1+w)e^w$). Par la formule d'inversion de Lagrange, si z est proche de 0,

$$
\begin{aligned}
W(z) &= \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} [w^{n-1}] e^{-nw} \right) z^n \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \times \frac{(-n)^{n-1}}{(n-1)!} z^n \\
&= \sum_{n\geq 1} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n
\end{aligned}
$$

Le rayon de convergence de W est $\frac{1}{e}$ (par la règle de d'Alembert, puisque $\frac{(n+1)^n}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^{n-1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \longrightarrow e$).